Rozdział IV

Utrata stateczności

Klasyczne ujęcie problemów utraty stateczności sprowadzą się matematycznie do rozwiązania zadania na wartości własne. W wyniku takiego podejścia otrzymuje się siłę krytyczną przy utracie stateczności pręta ściskanego jako najmniejszą z wartości siły osiowej przy której są możliwe dwie postacie równowagi. Pierwsza odpowiada ściskaniu pręta, zaś druga ściskaniu ze zginaniem.

Wartość siły krytycznej, ale nie analizy zjawiska utraty stateczności można oszacować z analizy jednoczesnego ściskania i zginania pręta, w którym występują wstępne ugięcia. Przypadek ten będziemy analizować w zakresie nieliniowo-sprężystym oraz lepkosprężystym.

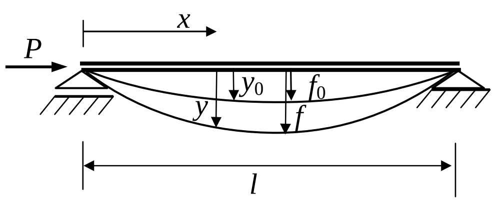
Analizę problemu rozpoczniemy od określenia związku między krzywizną a momentem zginającym w przypadku równania fizycznego postaci $\sigma = A\varepsilon^N$.

W wyniku klasycznych przekształceń otrzymamy zależność krzywizny od momentu

$$M = AJ(N+1)\kappa^N \rightarrow \kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$$

gdzie

$$J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF, \quad n = \frac{1}{N}$$



Rys. 4.0 Utrata stateczności pręta ściskanego z imperfekcjami y_0

Równanie różniczkowe osi ugiętej pręta przyjmie formę

$$y'' - y_0'' = -\left(\frac{Py}{AJ(N+1)}\right)^n \qquad y \cong f \sin\frac{\pi x}{l} \qquad y_0 \cong f_0 \sin\frac{\pi x}{l}$$

Podstawiając przyjęte przybliżone postacie ugięć y i imperfekcji y_0 do równania osi ugiętej pręta otrzymamy

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f_0=-\left(\frac{Pf}{AJ(N+1)}\right)^n\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^{n-1}$$

Z uzyskanego równania wnosimy, iż przyjęcie osi ugiętej w postaci sinusoidy nie sprowadza problemu do prostego równania algebraicznego jak to się dzieje w zadaniach liniowo-sprężystych.

W przybliżonym ujęciu , kiedy analizujemy ugięcia w $x = l/2$ otrzymamy

$$f=\frac{f_0}{1-\left(\frac{Pf}{AJ(N+1)}\right)^n\frac{l^2}{\pi^2 f}}$$

Zauważmy, iż ugięcie w środku belki $f \to \infty$, kiedy

$$\left(\frac{P_K f}{AJ(N+1)}\right)^n\frac{l^2}{\pi^2 f}=1 \quad \text{wtedy} \quad (P_K)^n=\frac{\pi^2(AJ)^n}{l^2 f^{n-1}}$$

W szczególności w początkowej fazie procesu, kiedy $f = f_0$ i $P_K = P_K^0$ zachodzi

$$(P_K^0 f_0)^n f_0^{-1}=(P_K f)^n f^{-1} \quad \text{stąd} \quad P_K^0/P_K=(k)^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{gdzie} \quad k=f_0/f, \quad 0<k<1$$

Oszacowana w ten sposób siła krytyczna pozwala analizować warunki utraty stateczności w zakresie nieliniowym.

Przypadkiem szczególnym tych rozważań *(n = 1)* są zależności

$$\sigma=E\varepsilon\to\kappa=\frac{M}{EJ}$$

$$y''-y_0''=-\frac{Py}{EJ} \quad \to \quad -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f_0=-\frac{Pf}{EJ}$$

Ugięcie belki w środku rozpiętości spełnia warunek

$$f=\frac{f_0}{1-\frac{P}{P_K}} \quad \text{gdzie} \quad P_K=\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Przeanalizujemy jeszcze problem zginania i ściskania pręta z imperfekcjami w zakresie nieliniowo-lepkosprężystym.

Równanie fizyczne $\sigma=\varepsilon^N * dA$ prowadzi do relacji

$$M=J(N+1)\kappa^N * dA \quad \rightarrow \quad \kappa=\left(da*M\frac{1}{J(N+1)}\right)^n, \quad da*A=H$$

Równanie osi ugiętej pręta ma w tym przypadku postać

$$y''-y_0''=-\left[da*(Py)\frac{1}{J(N+1)}\right]^n$$

Po przyjęciu kształtu linii ugięć $y\cong f(t)\sin\frac{\pi x}{l}$, $y_0\cong f_0(t)\sin\frac{\pi x}{l}$ otrzymamy

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f(t)+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f_0(t)=-\left[da*(Pf(t))\frac{1}{J(N+1)}\right]^n\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^{n-1}$$

Analizując ugięcia w środku rozpiętości $x=\frac{l}{2}$ $\rightarrow$ $\sin\frac{\pi}{2}=1$ uzyskamy przybliżoną zależność ugięcia *f* od siły osiowej *P*

$$f(t)=\frac{f_0(t)}{1-\left[da*(Pf(t))\frac{1}{J(N+1)}\right]^n\frac{l^2}{f(t)\pi^2}}$$

Ugięcie belki $y=f\sin\frac{\pi x}{l}$ rośnie nieograniczenie, kiedy $f\rightarrow\infty$ czyli

$$\left[da*(Pf(t))\frac{1}{J(N+1)}\right]^n\frac{l^2}{f\pi^2}=1$$

stąd dla $f = f_0$

$$\left(P_K(t) f_0(t)\right) * da \frac{1}{J(N+1)} = \left(\frac{\pi^2 f_0}{l^2}\right)^N \to P_K(t) f_0(t) = J(N+1)\left(\frac{\pi^2 f_0(t)}{l^2}\right)^N * dA$$

Otrzymana zależność pozwala na szacowanie obciążenia krytycznego $P(t)$ jako funkcji czasu, parametrycznie zależnej od wstępnych ugięć pręta $f_0(t)$. Analizowany przebieg narastania obciążenia krytycznego dotyczy zadań nieliniowych lepkosprężystych. W tym przypadku nie należy mówić o jednej wartości siły krytycznej, a o procesie, który prowadzi do utraty stateczności.

W przypadku szczególnym liniowej lepkosprężystości, kiedy $\sigma = E * d\varepsilon$ oraz $M = JE * d\kappa \to \kappa = \frac{1}{J} F * dM \quad (E * dF = H) \quad M = Py$ równanie osi ugiętej pręta ściskanego siłą osiową P o wstępnych ugięciach y_0 ma postać

$$y'' - y_0'' = -\frac{1}{J}(Py) * dF \qquad y = f(t)\sin\frac{\pi x}{l}, \quad y_0 = f_0(t)\sin\frac{\pi x}{l}$$

Uwzględniając przyjęte postacie linii ugiętej pręta w równaniu osi otrzymamy

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f(t) * dH + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f_0(t) = -\frac{P}{J} f * dF \to f = \frac{f_0}{1 - (Pf) * dF \dfrac{l^2 E_0}{\pi^2 E_0 J f(t)}}$$

Przemieszczenie $y \to \infty$ kiedy

$$(Pf) * dF \frac{l^2 E_0}{\pi^2 E_0 J f(t)} = 1 \to (Pf) * dF \frac{E_0}{P_K} = f(t), \quad P_K = \frac{\pi^2 E_0 J}{l^2}$$

Ostatecznie

$$P_K(t) = \frac{P_E}{f_0(t) E_0} f_0(t) * E(t) \text{ gdzie } E(t = 0_+) = E_0, \quad P_E = \frac{\pi^2 E_0 J}{l^2}$$

Wynik ten dowodzi, że w przypadku materiałów lepkosprężystych nie mamy do czynienia z jedną siłą krytyczną, a z krytycznym procesem narastania obciążeń aż do utraty stabilności procesu deformacji.

Podamy jeszcze oszacowanie siły krytycznej w przypadku, kiedy materiał konstrukcji podlega równaniom lepkiego płynięcia $\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0 = B\sigma^n$, gdzie $B = B(T,t)$ jest funkcją zależną od temperatury i czasu a $\dot{\varepsilon}_0$ odkształceniami wstępnymi w materiale. Równania w tej uproszczonej formie mogą dotyczyć pełzania metali w temperaturach rzędu 1/3 temperatury topnienia.

Postępując podobnie jak poprzednio otrzymamy relację prędkość krzywizny $\dot{\kappa}$ - moment zginający M

$$\dot{\kappa} - \dot{\kappa}_0 = B\left(\frac{M}{J(N+1)}\right)^n$$

a dalej równanie różniczkowe osi ugiętej ściskanego pręta

$$\dot{y}'' - \dot{y}_0'' = B\left(\frac{Py}{J(N+1)}\right)^n, \quad \dot{y} = \dot{f}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \dot{y}_0 = \dot{f}_0 \sin\frac{\pi x}{l}$$

Uwzględniając postać osi ugiętej pręta otrzymamy

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \dot{f} + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \dot{f}_0 = B\left(\frac{Pf}{J(N+1)}\right)^n \left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^{n-1} \rightarrow \dot{f} = \frac{\dot{f}_0}{1 - B\left(\frac{Pf}{J(N+1)}\right)^n \frac{l^2}{\pi^2 \dot{f}}}$$

Warunek utraty stateczności uzyskamy z zależności $\dot{f} \rightarrow \dot{f}_0$ i $\dot{f} \rightarrow \infty$

$$(P_K f)^n \frac{l^2 B}{\pi^2 [J(N+1)]^n} = \dot{f} \rightarrow (P_K)^n = \frac{\pi^2 [J(N+1)^n]}{Bl^2} \frac{\dot{f}}{f^2}$$

oraz $(P_K f)^n \dot{f}^{-1} = (P_K^0 f_0)^n \dot{f}_0^{-1}$

stąd $P_K = kl^{\frac{1}{n}} P_K^0$ gdzie $k = \dfrac{f_0}{f}, \quad l = \dfrac{f_0}{f}, \quad P_K^0 = P_K(t = 0_+)$

Podobnie jak poprzednio także i w tym przypadku otrzymamy krytyczny proces narastania obciążeń, który prowadzi do utraty stabilności procesu deformacji.

Określono wartości sił krytycznych dla kilku typów materiałów

- dla $\sigma = E\varepsilon$ $\quad P \rightarrow P_K = P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad J = \int_F (z)^2 \, dF$

- dla $\sigma = A\varepsilon^N \quad P \to P_K = k^{1-\frac{1}{n}} P_K^0, \quad J(N+1) = \int_F z^{N+1} dF,$

$$(P_K^0)^n \to P_K = \frac{\pi^2 (AJ(N+1))^n}{l^2 f_0^{n-1}}, \quad k = \frac{f_0}{f}$$

- dla $\sigma = E * d\varepsilon \quad E_0 = E(0_+) \qquad P \to P_K(t) = \frac{P_E}{f_0(t) E_0} f_0(t) * E(t)$

- dla $\sigma = \varepsilon^N * dA \qquad P \to P_K(t) = \frac{J(n+1)}{f_0(t)} \left(\frac{\pi f_0(t)}{l^2} \right)^N * dA$

- dla $\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_0 = B\sigma^n \quad P \to P_K(t) = k\eta^{1/n} P_K^0, \quad k = \frac{f_0}{f}, \quad l = \frac{\dot{f}_0}{f},$

$$(P_K^0)^n = \frac{\pi^2 BJ(N+1)^n}{l^2} \quad \frac{f_0}{(f_0)^n}$$

$$J(N+1) = \int_F z^{N+1} dF$$

Wyznaczenie warunków utraty stateczności układu prętowego jest zadaniem dosyć złożonym i przebiega inaczej w układach statycznie wyznaczalnych aniżeli niewyznaczalnych. W pierwszym przypadku należy jedynie zlokalizować ten pręt konstrukcji w którym wystąpi największa siła osiowa N, a następnie uzależnić tę siłę od obciążeń zewnętrznych. Z warunku $N=P_K$ oraz przy $N=N(q,V,H)$, gdzie q – jest obciążeniem zewnętrznym, a V,H – wartościami reakcji, wyznaczamy wartość krytyczną obciążenia q. Wartość ta jest niezależna od własności materiału jak i czynników niemechanicznych, ale od nich zależy jednak wartość siły krytycznej.

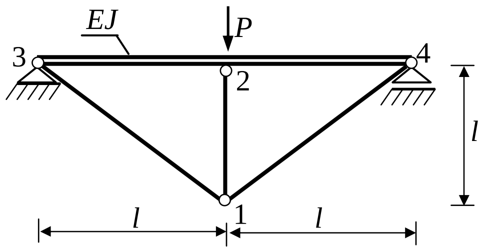
Zupełnie inaczej postępujemy przy wyznaczaniu sił krytycznych w zadaniach statycznie niewyznaczalnych, ponieważ siły osiowe w pręcie ulegającym wyboczeniu zależą też od deformacji układu, wpływów niemechanicznych i sił hiperstatycznych.

Możliwe są tu dwie drogi postępowania. Pierwsza polega na ułożeniu równań metody sił w taki sposób, aby jedną z sił nadliczbowych była siła osiowa $X_K=N=P_K$ w pręcie, który ulegnie wyboczeniu. Otrzymujemy wówczas układ równań metody sił w którym należy przyjąć, że $X_K=N=P_K$ jest znane, a do zbioru niewiadomych sił dołączamy poszukiwaną wartość parametru krytycznego (obciążenie, temperaturę, wstępne przemieszczenia itp.).

Inny sposób polega na rozbiciu układu na dwa podukłady. Pierwszy zawiera pręt, który ulega wyboczeniu, zaś drugim jest reszta. Następnie wypisujemy warunek nierozdzielności zachodzący między przemieszczeniami obu układów. Z warunku tego wyznaczamy poszukiwaną wartość krytyczną (obciążenie, czy też wpływy niemechaniczne). Warto zauważyć, że w przypadku ogólnym, przynajmniej w zadaniach liniowo-sprężystych posługujemy się klasycznymi metodami, a więc metodą sił i przemieszczeń adaptowaną do zagadnienia utraty stateczności.

ZADANIE 4.1.

W podanym układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym, którego schemat przedstawiono na rys. 4.1a, należy określić wartość obciążenia krytycznego *P*

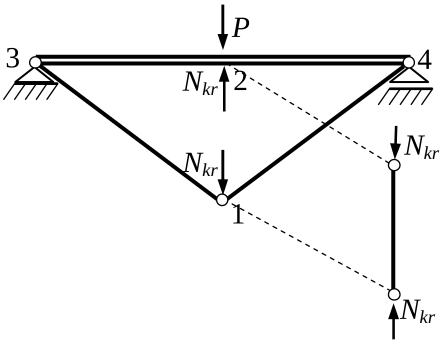


Rys. 4.1a

Dane: *l, E, J, F*
Szukane: P_K=?

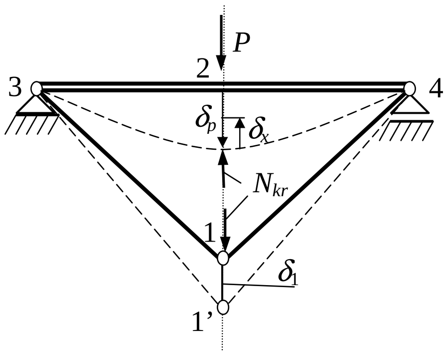
Rozwiązanie:
Wyboczeniu ulegnie pręt pionowy 1-2. Warunek utraty stateczności można sformułować następująco: $N_{1-2} \geq N_{Kr}$ gdzie N_{1-2} jest siłą osiową wywołaną działaniem siły *P*, a siłą krytyczną N_K, która wynosi $N_K = \dfrac{\pi^2 EJ}{l_w^2}$ dla $\left(l_w = l\right)$.

Sposób postępowania polega tu na rozwiązaniu zadania jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego z uwzględnieniem warunku nałożonego na wartość siły osiowej w pręcie 1-2 oraz warunku nierozdzielności. Siła osiowa w pręcie 1-2 jest równa $N_K = \dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}$.



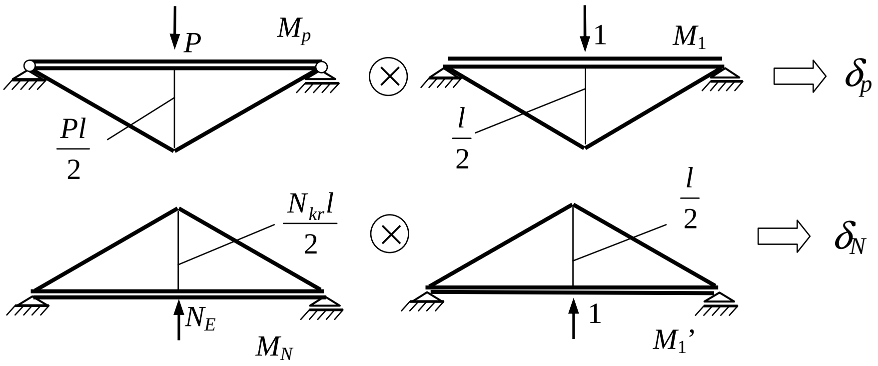
Rys. 4.1b

Analizujemy przemieszczenia punktu 2 belki 3-4



Rys. 4.1c

Warunek nierozdzielności przyjmie postać $\left(\delta_p - \delta_x\right) - \delta_1 = \lambda_{1-2}$, gdzie δ_p oznacza przemieszczenie pionowe belki 3-4 powstałe w wyniku działania siły P, δ_x – przemieszczenie pionowe belki 3-4 od siły N_K i δ_1 - przemieszczenie pionowe układu 3-1-4 od sił osiowych $N_{1\text{-}3}$ i $N_{1\text{-}4}$ powstałych w wyniku działania siły N_K na układ prętowy 3-1-4. Wartości δ_p i δ_x wynikają z przemnożenia następujących wykresów



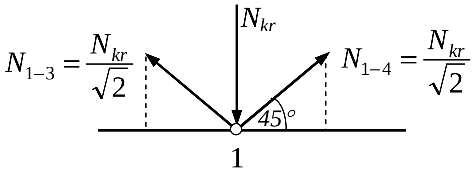
Rys. 4.1d

$$\delta_p = \int_s \frac{M_p M_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left[2 \cdot \frac{Pl}{2} l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2}\right] = \frac{1}{EJ} \frac{Pl^3}{6}$$

$$\delta_x = \int_s \frac{M_N M_1'}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left[2 \frac{N_K l}{2} l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2}\right] = \frac{1}{EJ} \frac{N_K l^3}{6}$$

Z kolei przemieszczenie δ_1 obliczymy wyznaczając wydłużenia w prętach 1-3 i 1-4 powstałe w wyniku działania sił osiowych $N_{1\text{-}3}$ i $N_{1\text{-}4}$ zależnych od siły N_k działającej na układ 3-1-4.

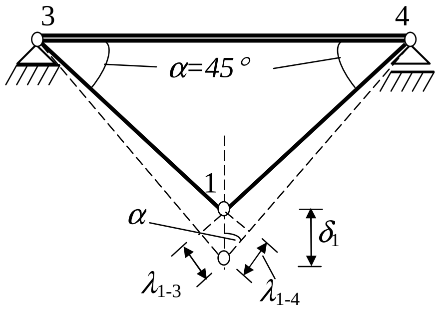
Wyznaczymy teraz siły $N_{1\text{-}3}$ i $N_{1\text{-}4}$ z warunku równowagi węzła 1



Rys. 4.1e

$$N_{1-3} = N_{1-4} = N_K \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Mając obliczone siły $N_{1\text{-}3}$ i $N_{1\text{-}4}$ wyznaczymy przemieszczenie δ_1 punktu 1 posługując się planem przemieszczeń przedstawionym na rys. 4.1f



Rys. 4.1f

Wydłużenie λ pręta o długości l, na który działa siła osiowa N obliczamy ze wzoru

$$\lambda = \frac{Nl}{EF}$$

Korzystając ze wzoru na wydłużenie mamy

$$\lambda_{1-3} = \frac{N_K l}{EF}$$

$$\lambda_{1-4} = \frac{N_K l}{EF}$$

Z rys. 4.1f wynika, że $\cos\alpha = \dfrac{\lambda_{1-3}}{\delta_1}$; $\alpha = 45^o$

$$\delta_1 = \frac{\lambda_{1-3}}{\cos 45^o} \qquad\qquad \delta_1 = \frac{N_K l\sqrt{2}}{EF}$$

Podstawiając obliczone wartości $\delta_p, \delta_x, \delta_1$ do warunku nierozdzielności otrzymamy

$$\frac{1}{EJ}\frac{Pl^3}{6} - \frac{1}{EJ}\frac{N_K l^3}{6} - \frac{N_K l\sqrt{2}}{EF} = \frac{N_K l}{EF}$$

Uwzględniając, że $N_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_E$ oraz $i^2 = \frac{J}{F}$ wyliczamy siłę $P=P_K$

$$P = P_K = \frac{6\pi^2 EJ^2}{l^4}\left[\frac{l^2}{6J} + \frac{1}{F}\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

Gdy siła P obciążająca układ przybierze wartość P_K wówczas pręt 1-2 ulegnie wyboczeniu

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left[1 + 6\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\frac{i}{l}\right)^2\right]$$

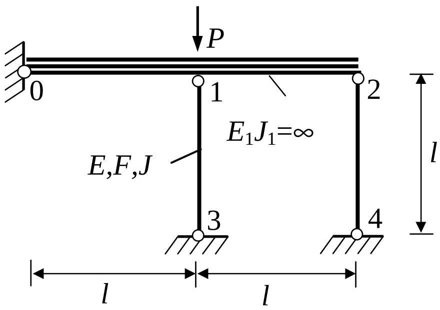
Ostatecznie

$$P_K = P_E\left[1 + 6\left(1+\sqrt{2}\right)(s)^2\right]$$

gdzie P_E jest eulerowską siłą krytyczną pręta 1-2 a s – jego smukłością.

ZADANIE 4.2.

W hiperstatycznym układzie prętowym należy wyznaczyć wartość krytyczną obciążenia $P=P_K$, która spowoduje wyboczenie pręta 1-3 lub 2-4. Pręt 0-2 jest nieodkształcalny.



Rys. 4.2a

Dane: $l, E, F, J, E_1J_1=\infty$
Szukane: $P_K=?$

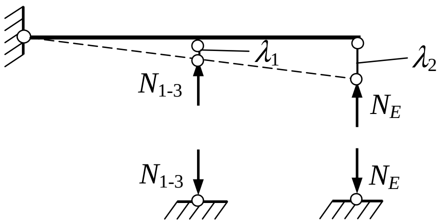
Rozwiązanie:

Pręt 0-2 jest nieskończenie sztywny $(EJ = \infty)$ a więc skrócenie pręta 2-4 jest 2 razy większe niż pręta 1-3

$\lambda_2 = 2\lambda_1$

W prętach 1-3 i 2-4 powstaną siły osiowe ściskające. Z uwagi na większą wartość skrócenia w pręcie 2-4 wystąpi w nim wcześniej siła osiowa równa sile eulerowskiej $N_K = \pi^2 EJ / l_w^2$

$N_{2-4} = N_K$



Rys. 4.2b

Skrócenia λ_1 i λ_2 są dane znanymi wzorami

$$\lambda_2 = \frac{N_{1-3}l}{EF}, \quad \lambda_2 = \frac{N_{2-4}l}{EF}$$

$$N_{2-4} = N_K$$

$$2\frac{N_{1-3}l}{EF} = \frac{N_K l}{EF}$$

$$N_K = 2N_{1-3}$$

$$N_{1-3} = \frac{1}{2}N_K$$

Stronę statyczną zadania stanowi równanie $\sum M_0 = 0$

$$N_{1-3} \cdot l + N_K \cdot 2l - Pl = 0$$

$N_{1-3} = P - 2N_K$

Uwzględniając powyższe zależności można napisać

$$\frac{1}{2} N_K = P - 2N_K$$

Wartość obciążenia P_K, które spowoduje wyboczenie pręta 2-4, wynosi

$$P_K = \frac{5}{2} N_K$$

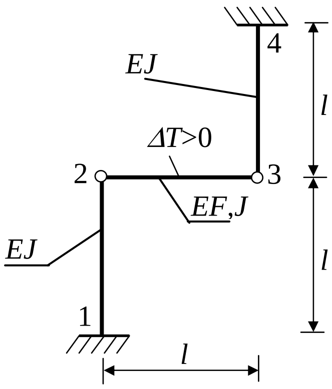
Ponieważ $l = l_w$ otrzymujemy ostatecznie

$$P_K = \frac{5}{2} \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Jest to poszukiwana wartość obciążenia krytycznego w układzie.

ZADANIE 4.3.

W podanym układzie prętowym, którego schemat przedstawiono na rys. 4.3a należy określić wartość przyrostu temperatury ΔT_K w pręcie 2-3, który doprowadzi do utraty stateczności.

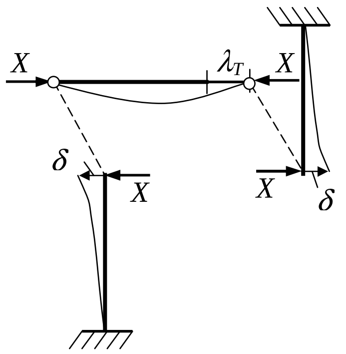


Rys. 4.3a

Dane: *l, EF, EJ*
Szukane: $\Delta T_K = ?$

Rozwiązanie:

W tym zadaniu wyboczeniu ulegnie pręt poziomy 2-3. Warunek utraty stateczności wyniknie z analizy stanu względnych przemieszczeń końców pręta 2-3. Wymagać będziemy aby wydłużenie pręta od temperatury $\lambda_T = \alpha_T \Delta T \cdot l$ i skrócenie od siły krytycznej X $\lambda_X = \dfrac{Xl}{EF}$, gdzie $X = \dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}$ było równe przemieszczeniu prętów pionowych. Przytoczony sposób postępowania przedstawia rys. 4.3b

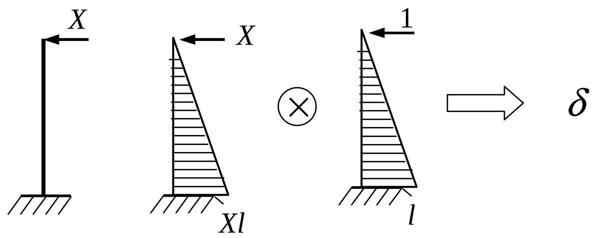


Rys. 4.3b

Warunek nierozdzielności przemieszczeń tego układu jest następujący

$$\lambda_T - \lambda_X = 2\delta$$

Wartość δ obliczymy z „przemnożenia” wykresów



Rys. 4.3c

$$\delta = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} Xl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l\right) = \frac{1}{3}\frac{Xl^3}{EJ}$$

Po podstawieniu uzyskanego wyniku do warunku nierozdzielności wraz z

$$\lambda_T = \alpha_T \Delta T \cdot l$$

$$\lambda_X = \frac{Xl}{EF} \quad \text{i} \quad X = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$\delta = \frac{1}{3}\frac{Xl^3}{EJ}$$

otrzymamy

$$\alpha_T \cdot \Delta T \cdot l - \frac{Xl}{EF} = \frac{2}{3}\frac{Xl^3}{EJ}$$

$$\Delta T = \frac{\frac{2Xl^3}{3EJ} + \frac{Xl}{EF}}{\alpha_T \cdot l}$$

Stąd wiedząc, że $X = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ otrzymamy

$$\Delta T_K = \frac{EF\,2Xl^3 + 3XlEJ}{3\alpha_T lEJEF} = \frac{2Xl^2EF + 3XEJ}{3\alpha_T EJEF}$$

$$\Delta T_K = \frac{X\left(2l^2EF + 3EJ\right)}{3\alpha_T EJEF} = \frac{\pi^2\left(2l^2EF + 3EJ\right)}{3l^2EF}$$

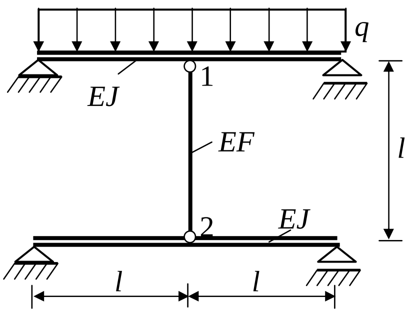
$$\Delta T_K = \frac{\pi^2 EJ}{\alpha_T l^2}\left(\frac{2}{3}\frac{l^2}{EJ} + \frac{1}{EF}\right) = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{\alpha_T} + \frac{\pi^2}{\alpha_T}\left(\frac{i}{l}\right)^2 = \frac{\pi^2}{\alpha_T}\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{i}{l}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{\alpha_T l}\left[\frac{2}{3}l + \frac{J}{Fl}\right] = \frac{\pi^2}{\alpha_T}\left[\frac{2}{3} + (\frac{i}{l})^2\right]$$

gdzie $\frac{i}{l}$ jest smukłością pręta.

ZADANIE 4.4.

W podanym układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym wyznaczyć wartość krytyczną obciążenia q, która spowoduje wyboczenie pręta 1-2.

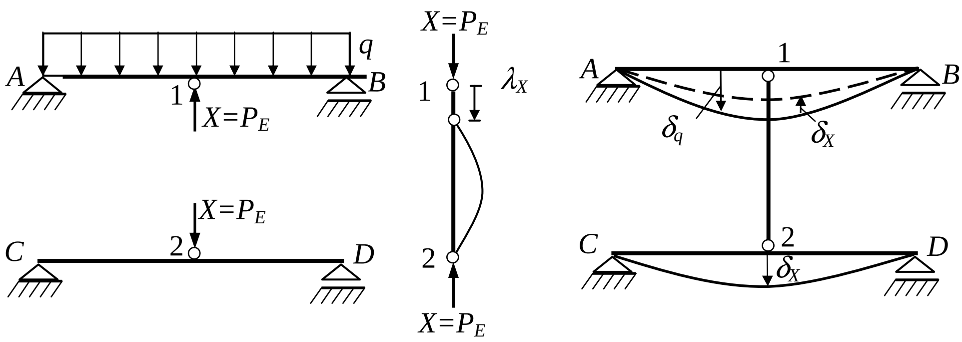


Rys. 4.4a

Dane: l, F, E, J
Szukane: q_{kr}=?

Rozwiązanie:

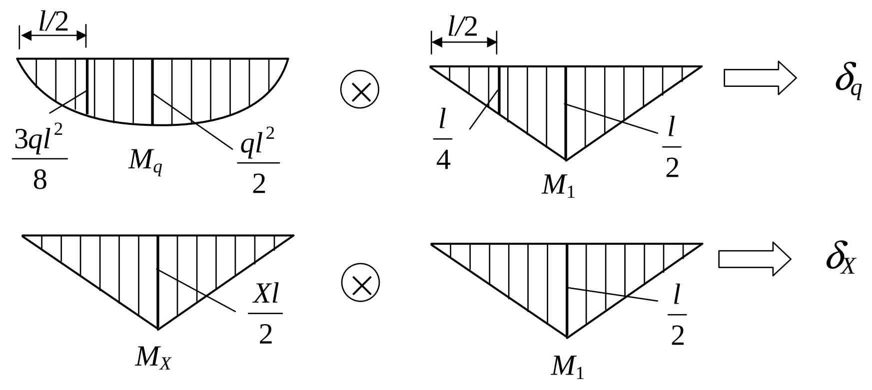
W analizowanym zadaniu wyboczeniu ulegnie pręt pionowy 1-2. Przedstawione zadanie jest równoważne zadaniu statycznie wyznaczalnemu, w którym siła hiperstatyczna X powodująca wyboczenie pręta 1-2 jest równa eulerowskiej sile krytycznej $X = P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{l_w^2}$ gdzie $l_w=l$ i tak dobrana, aby spełniony był warunek zgodności przemieszczeń pręta 1-2, tzn. warunek nierozdzielności. Wymagamy tu, aby skrócenie pręta 1-2 - $\lambda_X = \dfrac{P_E l}{EF}$ było równe sumie ugięć prętów poziomych od wszystkich sił działających na układ.



Rys. 4.4b

Warunek nierozdzielności przyjmie postać $(\delta_q - \delta_X) - \delta_X = \lambda_X$, gdzie: δ_q jest tu przemieszczeniem pionowym punktu 1 pręta AB od obciążenia q, δ_X jest przemieszczeniem pionowym punktu 1 pręta AB i punktu 2 pręta CD od obciążenia siłą X, zaś λ_X jest skróceniem pręta 1-2 od siły hiperstatycznej krytycznej $X=P_E$.

Wartości δ_q i δ_X wynikają z przemnożenia następujących wykresów



Rys. 4.4c

$$\delta_q = \int_s \frac{M_q M_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \frac{l}{6}\left[\frac{3}{8} ql^2 \cdot \frac{l}{4} \cdot 4 + \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2}\right] = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\delta_X = \int_s \frac{M_X M_1}{EJ} ds = \frac{2}{EJ}\left[\frac{1}{2}\frac{Xl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}\frac{l}{2}\right] = \frac{Xl^3}{12EJ}$$

$$\lambda_X = \frac{Xl}{EF}$$

Wartości δ_q, δ_X, λ_X podstawimy do warunku nierozdzielności

$$\frac{5}{24}\frac{ql^4}{EJ} - \frac{Xl^3}{12EJ} - \frac{Xl^3}{12EJ} = \frac{Xl}{EF}$$

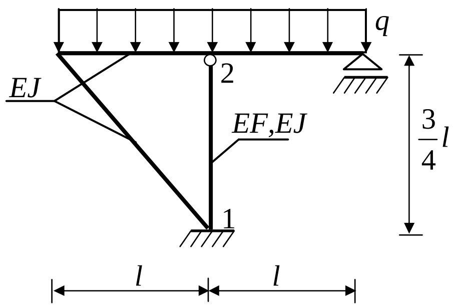
Uwzględniając w tym równaniu, że zgodnie z uwagą podaną wcześniej $X = P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}$ wyliczymy wielkość obciążenia krytycznego

$$q_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^3}\left[\frac{24}{5}\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \frac{4}{5}\right]$$

A zatem pręt 1-2 ulegnie wyboczeniu gdy obciążenie q przyjmie wartość q_{kr}.

ZADANIE 4.5.

W podanym układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym, którego schemat przedstawiono na rys. 4.5a, należy określić wartość obciążenia krytycznego q_{kr}.



Rys. 4.5a

Dane: l, E, J, F.
Szukane: q_{kr}=?

Rozwiązanie:
W analizowanym zadaniu wyboczeniu ulegnie pręt pionowy 1-2. Warunek utraty stateczności ma postać $N_{1-2} \geq P_E$, gdzie N_{1-2} jest siłą osiową wywołaną działaniem obciążenia q_{kr} w pręcie 1-2, a P_E siłą krytyczną, która w naszym zadaniu równa się $P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2}$ gdzie $l_w = \frac{3}{4} l$. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Rozwiązujemy je jak klasyczne zadanie niewyznaczalne z dodatkowym warunkiem dotyczącym wartości siły hiperstatycznej. Pręt 1-2 ulegnie wyboczeniu, jeżeli siła osiowa w nim osiągnie wartość $P_E = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{3}{4} l\right)^2}$